

Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра комп'ютерних наук

Методичні вказівки
до лабораторних робіт № 5 – № 8 з курсу

ОБРОБКА СИГНАЛІВ ТА ЗОБРАЖЕНЬ

Для студентів напряму підготовки
6.050101 “Комп’ютерні науки”

ТЕРНОПІЛЬ
2016

УДК 621.372+681.3
ББК 32.811.3
М54

Укладачі:

*Б.Б. Млинко, канд. техн. наук, доцент,
М.Є. Фриз, канд. техн. наук, доцент*

Рецензент:

С.А. Лупенко, докт. техн. наук, профессор

Розглянуто та затверджено на засіданні кафедри комп'ютерних наук
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
протокол № 14 від 10 червня 2015р.

Схвалено та рекомендовано до друку на засіданні методичної комісії факультету комп'ютерно-інформаційних систем та програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
протокол № 1 від 31 серпня 2015р.

М54 Методичні вказівки до лабораторних робіт №5 – №8 з курсу
“Обробка сигналів та зображень” / Б.Б. Млинко, М.Є. Фриз. –
Тернопіль: Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2016. – 40 с.

УДК 621.372+681.3
ББК 32.811.3

© Млинко Б.Б., Фриз М.Є. 2016
© Тернопільський національний технічний
університет імені Івана Пулюя 2016

ЗМІСТ

1	<i>Лабораторна робота № 5. Цифрові фільтри.....</i>	4
2	<i>Лабораторна робота № 6. Оптимальна фільтрація та прогноз випадкових послідовностей.....</i>	12
3	<i>Лабораторна робота № 7. Узгоджені фільтри.....</i>	19
4	<i>Лабораторна робота № 8. Виявлення детермінованих сигналів із використанням коваріаційних перетворень.....</i>	26
5	<i>Література.....</i>	35
6	<i>Додаток.....</i>	36

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5

ЦИФРОВІ ФІЛЬТРИ

Мета роботи: *набути практичних навичок програмної реалізації цифрових фільтрів, аналізу їх характеристик, здійснення цифрової фільтрації заданих сигналів.*

Теоретичні відомості

На відміну від аналогових лінійних систем (аналогових фільтрів, найпростішими прикладами яких є: RC-ланка, RLC-ланка та ін.), які здійснюють перетворення неперервних сигналів, цифрові лінійні системи (цифрові фільтри) є програмно чи апаратно реалізованими обчислювальними засобами, які за певним алгоритмом здійснюють перетворення числових послідовностей. Ці послідовності, зокрема, можуть бути отримані шляхом дискретизації неперервних сигналів.

У порівнянні з аналоговими системами, цифрові фільтри мають низку переваг, до яких, перш за все, слід віднести високу стабільність, завадостійкість і точність, які не залежать від впливу зовнішніх факторів (температури, вологості, тиску і т.д.). Для цифрових фільтрів властива також простота зміни характеристик, що важливо в задачах адаптації, для них немає проблеми погодження опорів навантажень, вони можуть працювати без втрати точності у діапазоні наднизьких частот, що важливо, наприклад, у гідроакустиці.

Недоліком є неминуча втрата інформації при переході від неперервних сигналів до числових послідовностей.

Цифровий фільтр можна реалізувати або апаратно – у вигляді спецпроцесора обробки сигналів, або програмно. Крім того, реалізація цифрового фільтра може передбачати роботу в режимі реального часу (on-line), коли кожен відлік сигналу, що поступає на вхід обчислювальної системи одразу ж нею обробляється, або в режимі off-line, коли всі дані спочатку записуються в пам'ять, а потім вже обробляються.

У цій роботі ми будемо досліджувати лінійні цифрові фільтри, реалізовані програмно, які працюють у режимі off-line. Крім того, будемо розглядати лише *стаціонарні* фільтри, з незмінними в часі характеристиками.

Кожен стаціонарний цифровий фільтр, як лінійна система, характеризується імпульсною реакцією $\varphi_\tau, \tau \in \mathbf{Z}$, що являє собою відгук (функцію дискретного аргументу) фільтра на вплив *одиночного імпульсу* $\delta_\tau = \begin{cases} 1, & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0. \end{cases}$ при нульових початкових умовах.

Нехай, на вхід фільтра поступає сигнал $x_t, t = \overline{-\infty, \infty}$. Тоді вихідний сигнал y_t буде являти собою дискретну згортку вхідного сигналу та імпульсної реакції фільтра, тобто:

$$y_t = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_\tau x_{t-\tau} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{t-\tau} x_\tau. \quad (5.1)$$

Як правило, на фільтр накладають вимоги *каузальності* (фізичної реалізованості): $\varphi_\tau = 0$, при $\tau < 0$, та *стійкості*:

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\varphi_\tau|^2 < \infty.$$

Для аналізу роботи цифрових фільтрів зручно використовувати метод *z-перетворень*.

Означення. Нехай $x_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — деяка числова послідовність. Тоді функція комплексної змінної $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k}$ називається *z-перетворенням послідовності* x_k .

Означення. Точка $z = z_0$ називається *нулем функції* комплексного аргументу $X(z)$, якщо $X(z_0) = 0$.

Означення. Точка $z = z'$ називається *полюсом функції* комплексного аргументу $X(z)$, якщо при $z \rightarrow z'$ функція $X(z) \rightarrow \infty$.

Приклад. Нехай $x_k = \begin{cases} 0, & k < 0, \\ e^{-ak}, & k \geq 0, \end{cases} \quad a > 0.$

Тоді $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak} z^{-k} = \frac{z}{z - e^{-a}}.$

У даному прикладі $X(z)$ має один нуль у точці $z = 0$ і один полюс у точці $z = e^{-a}$. Зрозуміло, що *z-перетворення* може мати і більшу кількість нулів і полюсів.

Нехай $X(z)$, $Y(z)$, $H(z)$ – z -перетворення відповідно – вхідного сигналу x_t , вихідного сигналу y_t та імпульсної реакції φ_τ . Можна показати, що при цьому

$$Y(z) = H(z)X(z). \quad (5.2)$$

Функція $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ називається *операторною функцією* фільтра.

Якщо покласти $z = e^{i\omega}$, $i = \sqrt{-1}$, ω – циклічна частота, то отримаємо функцію:

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{-i\omega k}, \quad \omega \in [-\pi, \pi],$$

яка називається *частотною характеристикою* фільтра.

Модуль $|H(\omega)|$ частотної характеристики називається *амплітудно-частотною характеристикою* фільтра. Аргумент $\arg H(\omega)$ частотної характеристики називається *фазо-частотною характеристикою* фільтра.

Якщо на вхід цифрового фільтра з частотною характеристикою $H(\omega)$ поступає стаціонарна в широкому розумінні випадкова послідовність η_t із спектральною щільністю потужності $S_\eta(\omega)$, то на виході будемо мати теж стаціонарну в широкому розумінні випадкову послідовність ξ_t із спектральною щільністю потужності:

$$S_\xi(\omega) = |H(\omega)|^2 S_\eta(\omega), \quad \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (5.3)$$

Найчастіше на практиці використовуються цифрові фільтри з дробово-раціональною операторною функцією, що являє собою функцію комплексного аргументу, яку можна представити у вигляді:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}} = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad (5.4)$$

де, як видно з виразу (6.4), $A(z)$ і $B(z)$ – поліноми комплексної змінної z відповідно M -го і N -го порядку; a_0, a_1, \dots, a_M , b_0, b_1, \dots, b_N – дійсні коефіцієнти, які називаються *параметрами фільтра*.

Ми зупинимось на вивченні часткових випадків згаданих фільтрів, а саме: фільтрів, для яких $B(z) = 1$ (рекурсивні фільтри) та фільтрів, для яких $A(z) = 1$ (нерекурсивні фільтри).

Нерекурсивний (трансверсальний) фільтр формує вихідний сигнал y_t за алгоритмом:

$$y_t = \sum_{s=0}^N b_s x_{t-s}, \quad (5.5)$$

де b_0, b_1, \dots, b_N – параметри фільтра.

Число N називається *порядком трансверсального фільтра*.

Структурну схему нерекурсивного фільтра N -го порядку наведено на рисунку 5.1 (де Σ – суматор, \otimes – помножувач, z^{-1} – елемент затримки на один крок (тобто, коли на вході елемента затримки є послідовність x_t , то на виході буде послідовність $y_t = x_{t-1}$)).

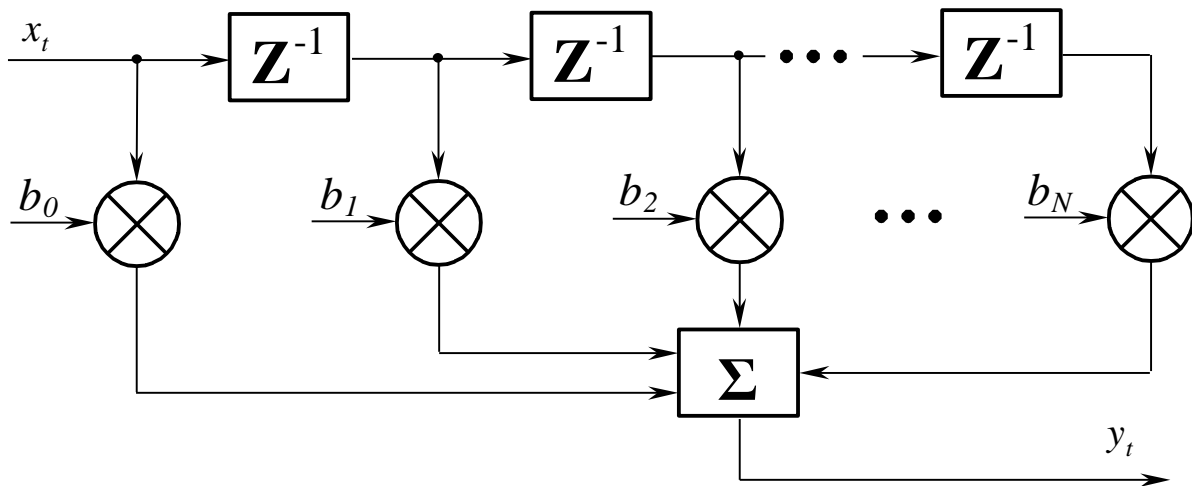


Рисунок 5.1

Операторна функція трансверсального фільтра:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}. \quad (5.6)$$

Частотна характеристика трансверсального фільтра:

$$H(\omega) = b_0 + b_1 e^{-i\omega} + b_2 e^{-i2\omega} + \dots + b_N e^{-iN\omega}. \quad (5.7)$$

Порівнюючи вирази (5.5) і (5.1) можна зробити висновок, що розглядуваний трансверсальний фільтр є каузальним та має *скінченну* в часі імпульсну реакцію, причому, $\varphi_0 = b_0$, $\varphi_1 = b_1$, \dots , $\varphi_N = b_N$ і $\varphi_\tau = 0$ для $\tau > N$.

Трансверсальний цифровий фільтр *завжди стійкий*, якраз через те, що його імпульсна реакція скінченна (фінітна).

Рекурсивний фільтр формує вихідний сигнал y_t за алгоритмом:

$$y_t = x_t - \sum_{s=1}^M a_s y_{t-s}, \quad (5.8)$$

де a_1, \dots, a_M – параметри фільтра.

Число M називається порядком рекурсивного фільтра.

Структурну схему рекурсивного фільтра M -го порядку наведено на рисунку 5.2.

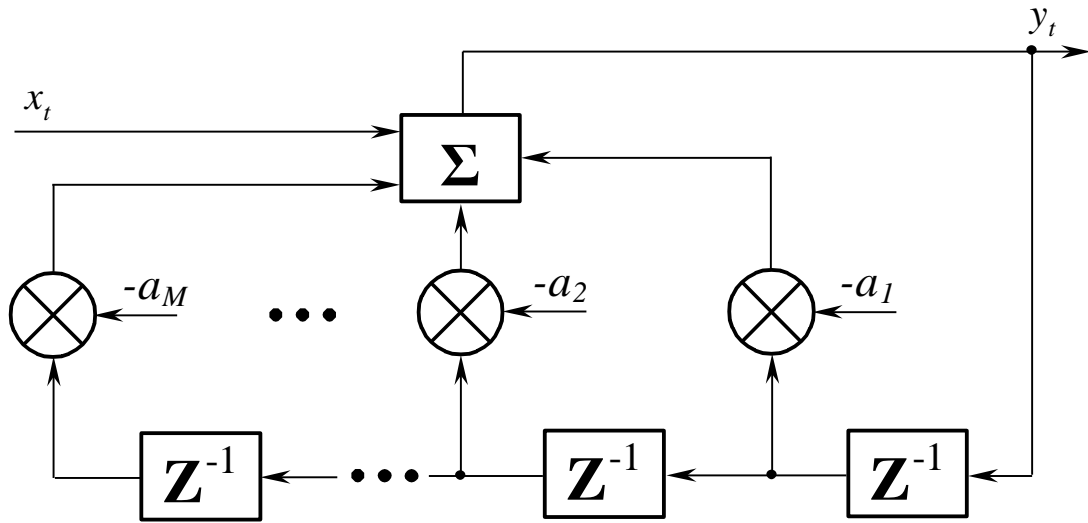


Рисунок 5.2

Операторна функція рекурсивного фільтра:

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}. \quad (5.9)$$

Частотна характеристика рекурсивного фільтра:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + a_1 e^{-i\omega} + a_2 e^{-i2\omega} + \dots + a_M e^{-iM\omega}}. \quad (5.10)$$

Можна показати, що рекурсивний фільтр має нескінченну в часі імпульсну реакцію. Рекурсивний фільтр є стійкий тільки тоді, коли усі полюси його операторної функції лежать усередині одиничного кола на комплексній площині (це одиничне коло описується рівнянням $|z| = 1$). Іншими словами, рекурсивний фільтр стійкий, коли усі корені рівняння $1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M} = 0$ (позначимо їх z'_k , $k = 0, M$) задовільняють умові $|z'_k| < 1$.

Зауваження. При практичному використанні рекурсивних чи нерекурсивних фільтрів в режимі off-line завжди буває задана тільки скінченна кількість відліків вхідного сигналу $x_t, t = \overline{0, n}$. Тому може виникати запитання – де взяти відліки $x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{-N}$ для нерекурсивного фільтра або $y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_{-M}$ для рекурсивного фільтра? У цій роботі будемо вважати, що вони дорівнюють нулеві.

Порядок виконання роботи

1. Вихідними даними для виконання роботи є:
 - 1.1. файл із записаною в ньому реалізацією вхідної стаціонарної випадкової послідовності $x_t, t = \overline{0, n}$ (формат файлу та обсяг даних слід уточнити у викладача);
 - 1.2. тип досліджуваного цифрового фільтра (рекурсивний, нерекурсивний), порядок фільтра та параметри фільтра (див. таблицю 5.1).
2. Завдання лабораторної роботи.
 - 2.1. Експериментально визначити імпульсну реакцію заданого фільтра. А саме, подати на вхід фільтра одиничний імпульс $x_t = \delta_t = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$ (тобто, $x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, \dots, x_n = 0$) і отримати вихідний сигнал y_t (див. (5.5) і (5.8)), який в даному випадку і буде являти собою імпульсну реакцію.

Таблиця 5.1

Варіант	Трансверсальний фільтр, $N=4$				
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
1	2	3	4	5	6
1	-0.24	0.11	0.4	0.11	-0.24
3	0	0.2	0.3	0.2	0
5	-0.3	0	0.6	0	-0.3
7	0.08	-0.08	0.6	-0.08	0.08
9	0.02	-0.08	0.8	-0.08	0.02
11	0	-0.05	0.9	-0.05	0
13	-0.05	-0.17	0.7	-0.17	-0.05
15	-0.03	-0.06	0.9	-0.06	-0.03

1	2	3	4	5	6
17	-0.03	-0.2	0.6	-0.2	-0.03
19	0	0.01	0.02	0.01	0
21	0.05	0.12	0.2	0.12	0.05
23	-0.3	0.2	0.6	0.2	-0.3
25	0.01	0.5	0.6	0.5	0.01
27	0.03	0.2	0.4	0.2	0.03
29	-0.03	0.2	0.6	0.2	-0.03

2.2. Знайти амплітудно-частотну характеристику $|H(\omega)|$ заданого фільтра, врахувавши, що:

- для трансверсального фільтра:

$$|H(\omega)| = \left| \sum_{s=0}^N b_s e^{-is\omega} \right| = \sqrt{\left(\sum_{s=0}^N b_s \cos(s\omega) \right)^2 + \left(\sum_{s=1}^N b_s \sin(s\omega) \right)^2};$$

- для рекурсивного фільтра:

$$|H(\omega)| = \left| \frac{1}{1 + \sum_{s=1}^M a_s e^{-is\omega}} \right| = \frac{1}{\left| 1 + \sum_{s=1}^M a_s e^{-is\omega} \right|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \sum_{s=1}^M a_s \cos(s\omega) \right)^2 + \left(\sum_{s=1}^M a_s \sin(s\omega) \right)^2}}.$$

Таблиці 5.2

Варіант	Рекурсивний фільтр, $M=2$	
	a_1	a_2
1	2	3
2	-1.8097	0.8187
4	-1.5644	0.6703
6	-1.4816	0.5488
8	-0.7243	0.4493
10	-1.2131	0.3679

1	2	3
12	0.5541	0.3012
14	-0.9932	0.2466
16	-0.0636	0.2019
18	0.9358	0.2466
20	-0.0858	0.3679
22	-1.0976	0.3012
24	-1.2228	0.5488
26	-1.3406	0.4493
28	-1.8007	0.8187
30	-1.6375	0.6703

2.3. Подати на вхід фільтра задану реалізацію x_t та отримати реалізацію вихідного сигналу y_t (див. (5.5), (5.8)).

2.4. Оцінити спектральну щільність потужності вхідної та вихідної послідовності (див. лабораторну роботу № 3, метод оцінювання уточнити у викладача).

2.5. Зробити висновки про характер зміни властивостей сигналу після проходження через фільтр. На основі обчисленої у п.2.2 амплітудно-частотної характеристики (див. також (5.3)) пояснити ці зміни.

3. Оформлення звіту по роботі.

Звіт повинен містити:

- тему, мету роботи;
- короткий виклад основних теоретичних положень;
- тип, порядок, параметри досліджуваного фільтра;
- графічне зображення його імпульсної реакції та амплітудно-частотної характеристики;
- графічне зображення вхідного x_t та вихідного y_t сигналів;
- графіки спектральних щільностей потужності вхідного та вихідного сигналів;
- висновки;
- додатки (тексти програм).

Контрольні запитання

1. Які переваги і недоліки мають цифрові фільтри порівняно із аналоговими?
2. Що таке імпульсна реакція фільтра?
3. Який фільтр називається каузальним, стійким?
4. Що таке z-перетворення?
5. Що таке операторна функція, частотна характеристика фільтра?
6. Що таке амплітудно-частотна, фазо-частотна характеристики фільтра?
7. Охарактеризуйте властивості рекурсивного фільтра.
8. Охарактеризуйте властивості трансверсального фільтра.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6

ОПТИМАЛЬНА ФІЛЬТРАЦІЯ ТА ПРОГНОЗ ВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Мета роботи: *набути практичних навичок програмної реалізації лінійних оптимальних цифрових фільтрів, аналізу їх характеристик, здійснення оптимальної цифрової фільтрації заданих сигналів.*

Теоретичні відомості

Розглянемо деякий лінійний *стаціонарний трансверсальний* цифровий фільтр, який характеризується фінітною імпульсною реакцією:

$$\varphi_{\tau} = \begin{cases} b_{\tau}, & \tau \in \overline{[0, N]} \\ 0, & \tau \notin \overline{[0, N]} \end{cases}$$

де $b_{\tau} < \infty$, $\tau \in \overline{[0, N]}$ – параметри фільтра;

N – порядок фільтра.

Нехай на вхід цього фільтра поступає сигнал:

$$x_t = v_t + \xi_t, \quad t \in \mathbf{Z}, \quad (6.1)$$

де v_t – “корисний сигнал”, що являє собою стаціонарну в широкому розумінні випадкову послідовність;

ξ_t – “завада” (або “шум”) – теж стаціонарна в широкому розумінні випадкова послідовність
(можна сказати, що x_t – “зашумлений сигнал”).

Причому, відомо, що $\mathbf{M} v_t = \mathbf{M} \xi_t = 0$; відомими є також кореляційна функція $R_{x(s)} = \mathbf{M}[x_t x_{t+s}]$, $s \in \mathbf{Z}$ вхідної послідовності x_t та взаємна кореляційна функція $R_{xv(s)} = \mathbf{M}[x_t v_{t+s}]$, $s \in \mathbf{Z}$ послідовностей x_t та v_t (тобто x_t та v_t є стаціонарно зв’язаними в широкому розумінні).

На виході розглядуваного цифрового фільтра будемо мати стаціонарну в широкому розумінні випадкову послідовність:

$$y_t = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau} x_{t-\tau} = \sum_{\tau=0}^N b_{\tau} x_{t-\tau}.$$

Необхідно знайти параметри b_{τ}^* , $\tau = \overline{0, N}$ оптимального фільтра, вихідний сигнал

$$y_t = \sum_{\tau=0}^N b_{\tau}^* x_{t-\tau} \quad (6.2)$$

якого в момент часу t якомога менше, в середньоквадратичному розумінні, відрізнявся б від “корисного сигналу” в момент часу $t + t_0$, $t_0 \in [0, \infty)$ (тобто, від v_{t+t_0}). Інакше кажучи, вихідний сигнал y_t повинен бути найкращою, в середньоквадратичному розумінні, оцінкою “корисного сигналу” v_{t+t_0} (про таку задачу ще кажуть, що оптимальний фільтр повинен найкращим чином виділяти “корисний сигнал” з “шуму”).

Термін “найкраща, в середньоквадратичному розумінні, оцінка” означає, що оптимальний фільтр повинен забезпечувати мінімальне значення дисперсії похибки

$$\varepsilon_t = y_t - v_{t+t_0}.$$

При цьому, розрізняють випадки:

- $t_0 > 0$ – *оптимальний прогноз* (вихідний сигнал y_t в момент часу t є найкращою оцінкою “майбутнього”, прогнозованого значення “корисного сигналу” v_{t+t_0} ; інтервал $[t, t + t_0]$ називається *інтервалом прогнозу*);

- $t_0 = 0$ – *оптимальна фільтрація* (вихідний сигнал y_t в момент часу t є найкращою оцінкою “корисного сигналу” v_t в той же момент часу t).

Особливості оптимального прогнозу та оптимальної фільтрації ілюструються на рис. 6.1.

Дисперсія похибки ε_t дорівнює:

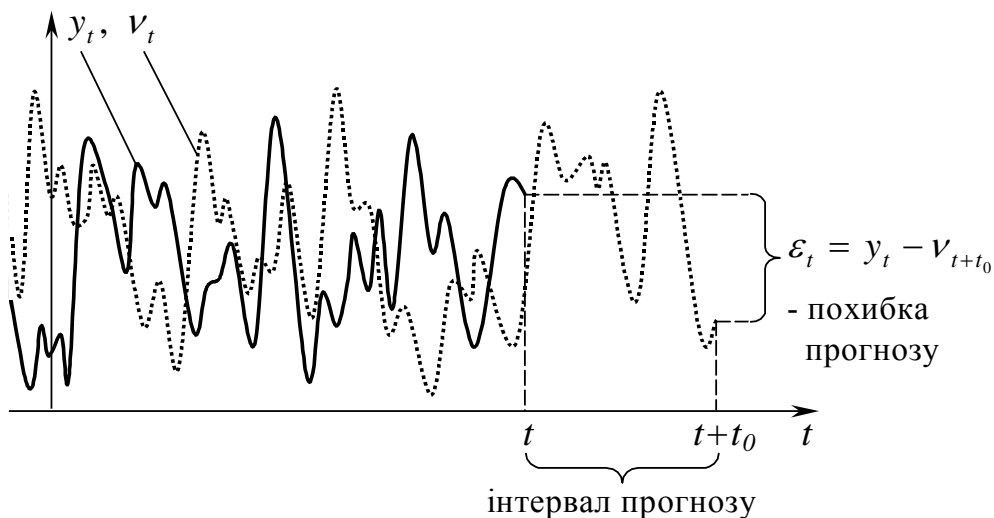
$$\begin{aligned} d^2 &= \mathbf{D}\varepsilon_t = \mathbf{M}\varepsilon_t^2 = \mathbf{M}v_{t+t_0}^2 + \mathbf{M}y_t^2 - 2\mathbf{M}[v_{t+t_0}y_t] = \\ &= R_{v(0)} + \sum_{\tau_1=0}^N \sum_{\tau_2=0}^N b_{\tau_1} b_{\tau_2} R_{x(\tau_2-\tau_1)} - 2 \sum_{\tau=0}^N b_{\tau} R_{xv(\tau+t_0)}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Таким чином, дисперсія (6.3) є функцією $(N+1)$ змінних, b_0, b_1, \dots, b_N (параметрів фільтра), тобто $d^2 = d^2(b_0, b_1, \dots, b_N)$. Синтез оптимального фільтра полягає у знаходженні таких значень параметрів $b_0^*, b_1^*, \dots, b_N^*$, які забезпечують мінімум функції $d^2(b_0, b_1, \dots, b_N)$, тобто

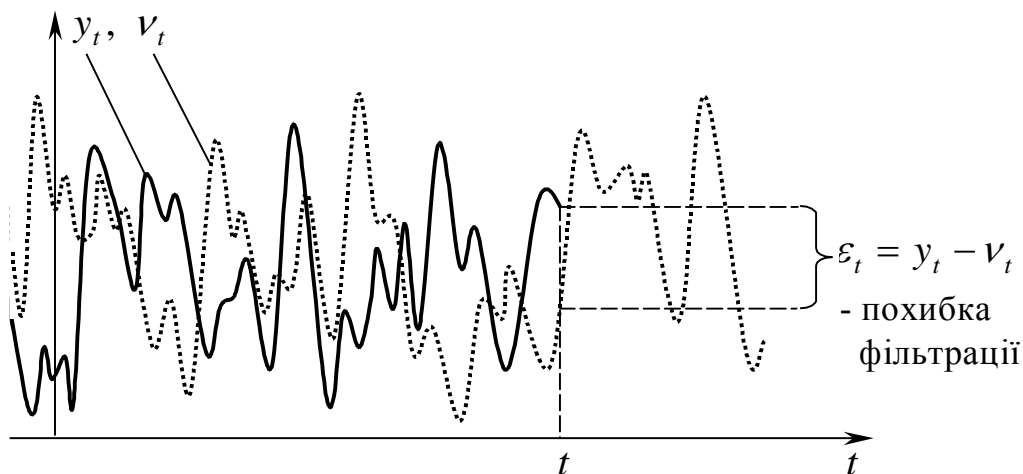
$$d^2(b_0^*, b_1^*, \dots, b_N^*) = \min_{b_0, b_1, \dots, b_N} d^2(b_0, b_1, \dots, b_N). \quad (6.4)$$

Співвідношення (6.4) є *критерієм оптимальності* синтезованого фільтра, тобто, фільтр вважається оптимальним, якщо його параметри $b_0^*, b_1^*, \dots, b_N^*$ задовольняють (6.4).

Можна показати, що мінімум у (6.4) існує та однозначно визначається добре відомими методами пошуку екстремумів функцій багатьох змінних. Зокрема, його можна знайти, диференціюючи функцію $d^2(b_0, b_1, \dots, b_N)$ по кожній змінній b_0, b_1, \dots, b_N і прирівнюючи результати до нуля.



а) ілюстрація оптимального прогнозу;



б) ілюстрація оптимальної фільтрації.

Рисунок 6.1

У результаті отримаємо систему $(N + 1)$ лінійних алгебраїчних рівнянь, з яких визначаються $b_0^*, b_1^*, \dots, b_N^*$. А саме:

$$\sum_{\tau=0}^N b_{\tau}^* R_{x(s-\tau)} = R_{xv(s+t_0)}, \quad s = \overline{0, N}. \quad (6.5)$$

Систему рівнянь (6.5) можна представити в матричному вигляді:

$$\mathbf{RB} = \mathbf{P}, \quad (6.6)$$

$$\text{де } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{x(0)} & R_{x(1)} & \dots & R_{x(N)} \\ R_{x(1)} & R_{x(0)} & \dots & R_{x(N-1)} \\ R_{x(2)} & R_{x(1)} & \dots & R_{x(N-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{x(N)} & R_{x(N-1)} & \dots & R_{x(0)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_0^* \\ b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_N^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} R_{xv(t_0)} \\ R_{xv(t_0+1)} \\ R_{xv(t_0+2)} \\ \vdots \\ R_{xv(t_0+N)} \end{pmatrix}.$$

(у матриці \mathbf{R} враховано, що $R_{x(s)} = R_{x(-s)}$).

Рівняння (6.6) легко розв'язується з використанням обчислювальних засобів (див., наприклад, доповнення до цієї роботи), звичайно, якщо тільки матриця \mathbf{R} не вироджена.

Для оптимального фільтра, параметри $b_0^*, b_1^*, \dots, b_N^*$ якого, знайдено з рівняння (6.6), дисперсія похибки ε_t дорівнює:

$$\mathbf{D}\varepsilon_t = d^2(b_0^*, b_1^*, \dots, b_N^*) = R_{v(0)} - \sum_{\tau_1=0}^N \sum_{\tau_2=0}^N b_{\tau_1}^* b_{\tau_2}^* R_{x(\tau_2-\tau_1)} =$$

$$= \mathbf{D}v_t - \mathbf{D}y_t.$$

Зауваження. У цій роботі ми розглядаємо лише трансверсальний фільтр, імпульсна реакція якого скінченна. Але, звичайно, задача оптимальної фільтрації чи прогнозу може бути розв'язана і для фільтрів із нескінченною імпульсною реакцією φ_τ , $\tau \in (-\infty, \infty)$. При цьому, найчастіше, використовують частотні характеристики сигналів та синтезованого оптимального фільтра.

Порядок виконання роботи


1. У даній роботі ми будемо розглядати на практиці тільки випадок оптимальної фільтрації, тобто $t_0 = 0$.
2. Вихідними даними для роботи є два файли, в одному з яких записано реалізацію “корисного сигналу” v_t (ім'я файлу з буквою s), а в іншому – реалізацію “завади” ξ_t (ім'я файлу з буквою z). Формат файлів та обсяги даних слід уточнити у викладача.
3. Відомо, що “корисний сигнал” та “завада” – некорельовані випадкові послідовності, тому

$$R_{x(s)} = R_{v(s)} + R_{\xi(s)}, \quad R_{xv(s)} = R_{v(s)}. \quad (6.8)$$

У таблиці 6.1 для кожного варіанту задано:

$$R_{v(s)}, R_{\xi(s)}, s = \overline{0, N}, N = 9; R_{v(s)} = R_{\xi(s)} = 0 \text{ при } |s| > N.$$

Таблиця 6.1

Варіант		s									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1, 7, 13, 19, 25	$R_{v(s)}$	3.85	3.3	2.76	2.24	1.75	1.3	0.9	0.56	0.29	0.1
	$R_{\xi(s)}$	3.07	2.12	0.72	-0.45	-0.89	-0.98	-0.84	-0.59	-0.28	-0.1
2, 8, 14, 20, 26	$R_{v(s)}$	2.75	2.14	1.9	1.57	1.22	0.91	0.64	0.42	0.31	0.1
	$R_{\xi(s)}$	2.49	1.76	0.86	0.02	-0.62	-0.93	-0.94	-0.61	-0.28	-0.1
3, 9, 15, 21, 27	$R_{v(s)}$	1.59	0.84	0.18	-0.32	-0.36	-0.14	0.11	0.3	0.18	0.05
	$R_{\xi(s)}$	2.96	2.33	1.76	1.12	0.59	0.11	-0.21	-0.32	-0.14	-0.05

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4, 10, 16, 22, 28	$R_{v(s)}$	1.69	1.47	1.13	0.68	0.34	0.12	0.06	0.01	0.01	0
	$R_{\xi(s)}$	2.38	1.36	0.3	-0.35	-0.68	-0.1	0.31	0.29	0.11	0.01
5, 11, 17, 23, 29	$R_{v(s)}$	0.46	0.3	0	-0.2	-0.24	-0.14	0	0.05	0.02	0
	$R_{\xi(s)}$	0.95	0.69	0.37	0.05	-0.19	-0.37	-0.43	-0.36	-0.14	-0.05
6, 12, 18, 24, 30	$R_{v(s)}$	1.99	1.13	-0.22	-1.09	-0.93	-0.35	0.23	0.24	0.07	-0.03
	$R_{\xi(s)}$	1.7	0.77	0.26	0.09	0.04	0.22	0.54	0.55	0.16	-0.1

- Синтезувати оптимальний фільтр N -го порядку ($N = 9$), тобто, знайти параметри $b_0^*, b_1^*, \dots, b_N^*$ наступним чином:
 - обчислити $R_{x(s)}$ і $R_{xv(s)}$, $s = \overline{0, N}$ за формулами (6.8);
 - маючи $R_{x(s)}$ і $R_{xv(s)}$ та, враховуючи, що $t_0 = 0$, з рівнянь (6.6) знайти параметри $b_0^*, b_1^*, \dots, b_N^*$.
- Сформувати реалізацію вхідного сигналу x_t за формулою (6.1), подати її на вхід оптимального фільтра з розрахованими у п.4 параметрами $b_0^*, b_1^*, \dots, b_N^*$ і отримати реалізацію вихідного сигналу y_t (формула (6.2)), порівняти її з реалізацією “корисного сигналу” v_t .
- Оцінити кореляційну функцію $R_{y(s)}$ вихідного сигналу (див. лабораторну роботу № 2) і порівняти її з заданою кореляційною функцією $R_{v(s)}$ “корисного сигналу”.
- Оцінити дисперсію похибки оптимальної фільтрації. Зважаючи на (6.7), цю оцінку можна знайти за формулою: $\hat{d}^2 = R_{v(0)} - \tilde{\gamma}_{y(0)}$, де $\tilde{\gamma}_{y(0)} = \tilde{\gamma}_{y(s)} \Big|_{s=0}$, $\tilde{\gamma}_{y(s)}$ – оцінка кореляційної функції вихідної послідовності y_t (див. п.6).
- Оформити звіт по роботі.
Звіт повинен містити:
 - тему, мету роботи;
 - короткий виклад основних теоретичних положень;
 - графіки реалізацій сигналів v_t, ξ_t, x_t, y_t ;

- графік імпульсної реакції синтезованого оптимального фільтра;
- графіки заданої кореляційної функції $R_{v(s)}$ “корисного сигналу”, кореляційної функції $R_{x(s)}$ вхідного сигналу та реалізації оцінки $\tilde{\gamma}_{y(s)}$ кореляційної функції сигналу на виході фільтра;
- реалізацію оцінки \hat{d}^2 дисперсії похибки оптимальної фільтрації;
- висновки;
- додатки (тексти програм).

Контрольні запитання

1. Що таке оптимальний фільтр? Яка різниця між оптимальною фільтрацією та оптимальним прогнозом?
2. Що таке інтервал прогнозу?
3. Який критерій оптимальності використовувався при синтезі оптимального фільтра?
4. Записати і проаналізувати систему рівнянь для знаходження параметрів оптимального фільтра.

Доповнення

Розв'язок системи лінійних рівнянь (6.6) можна отримати з використанням програмного пакету Mathcad, застосовуючи функцію $\text{lsolve}(\mathbf{R}, \mathbf{P})$.

Приклад. Розв'язати, з використанням програмного пакету Mathcad, систему рівнянь $\mathbf{RB}=\mathbf{P}$, де \mathbf{R} – задана матриця, \mathbf{P} – заданий вектор-стовбець, \mathbf{B} – шуканий вектор-стовбець.

У середовищі Mathcad дана задача розв'язується наступним чином.

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 8 & 2 & 9 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 9 & 6 \\ 4 & 2 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} := \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} := \text{lsolve}(\mathbf{R}, \mathbf{P}) \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7.293 \\ -1.568 \\ -2.92 \\ -0.014 \\ 1.157 \end{pmatrix}$$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7

УЗГОДЖЕНІ ФІЛЬТРИ

Мета роботи: ознайомитись з основними принципами виявлення детермінованих сигналів за критерієм максимального відношення сигнал/завада; набутти практичних навичок програмної реалізації узгоджених фільтрів.

Теоретичні відомості

Оптимальна фільтрація за критерієм максимального відношення сигнал/завада. Нехай на вхід цифрового стаціонарного фільтра з імпульсною реакцією φ_τ , $\tau \in (\overline{-\infty, \infty})$ поступає сигнал:

$$x_t = Q_t + \xi_t, t \in (\overline{-\infty, \infty}), \quad (7.1)$$

де Q_t – “корисний сигнал”, про який ми знаємо, що

- або $Q_t \equiv 0$ (тобто, “корисної складової” немає на вході фільтра),
- або Q_t – відома детермінована послідовність;

ξ_t – “завада” – нестационарна гільбертова випадкова послідовність із математичним сподіванням $\mathbf{M}\xi_t = 0$ та відомою кореляційною функцією $R_{t_1, t_2} = \mathbf{M}[\xi_{t_1} \xi_{t_2}]$, $t_1, t_2 \in \mathbf{Z}$.

Необхідно знайти таку імпульсну реакцію φ_τ^* , $\tau \in (\overline{-\infty, \infty})$ цифрового фільтра, щоб, спостерігаючи сигнал на його виході можна було б відповісти на запитання: “Є на вході “корисний сигнал” чи немає (тобто $Q_t = 0$)?”. Така проблема називається задачею виявлення детермінованого сигналу на фоні завади. Зрозуміло, що вона ставиться в зв’язку з тим, що “корисний сигнал” на вході фільтра (якщо він є) зашумлений (спотворений) завадою ξ_t і тому без певної обробки сигналу x_t відповісти на поставлене вище запитання неможливо.

Вихідний сигнал фільтра з імпульсною реакцією φ_τ , $\tau \in (\overline{-\infty, \infty})$ в даному випадку можна зобразити у вигляді:

$$y_t = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_\tau x_{t-\tau} = Q'_t + \xi'_t, t \in \mathbf{Z}, \quad (7.2)$$

де $Q'_t = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau} Q_{t-\tau}$ – “корисний сигнал” на виході фільтра;

$\xi'_t = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau} \xi_{t-\tau}$ – “завада” на виході фільтра.

Означення. Відношенням сигнал/завада на виході фільтра в момент часу $t_0 \in \mathbf{Z}$ називається число

$$\gamma = \frac{(Q'_{t_0})^2}{\mathbf{D}\xi'_{t_0}}, \quad (7.3)$$

де, згідно (7.2)

$$\begin{aligned} (Q'_{t_0})^2 &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau} \varphi_s Q_{t_0-\tau} Q_{t_0-s}; \\ \mathbf{D}\xi'_{t_0} &= \mathbf{M}(\xi'_{t_0})^2 = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau} \varphi_s R_{t_0-\tau, t_0-s}. \end{aligned}$$

Тобто, відношення сигнал/завада γ – це відношення квадрата “корисного сигналу” на виході фільтра в момент часу t_0 до дисперсії завади на виході фільтра в той же момент часу t_0 .

Знайдемо тепер таку імпульсну реакцію $\varphi_{\tau}^*, \tau \in (-\infty, \infty)$, яка б забезпечувала максимальне значення γ , тобто

$$\gamma[\varphi_{\tau}^*] = \max_{\varphi_{\tau}} \frac{\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau} \varphi_s Q_{t_0-\tau} Q_{t_0-s}}{\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau} \varphi_s R_{t_0-\tau, t_0-s}}. \quad (7.4)$$

Зауважимо, що $\gamma[\varphi_{\tau}^*]$ не зміниться, якщо $\varphi_{\tau}, \tau \in (-\infty, \infty)$ поділити на деяку дійсну константу. Виберемо в якості цієї константи величину, що стоїть у чисельнику (7.4), тобто – $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau} \varphi_s Q_{t_0-\tau} Q_{t_0-s}$.

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що таке ділення в (7.4) уже виконано, тому максимальне відношення сигнал/завада в момент часу t_0 дорівнює:

$$\gamma[\varphi_{\tau}^*] = \frac{1}{\min_{\varphi_{\tau}} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau} \varphi_s R_{t_0-\tau, t_0-s}}, \quad (7.5)$$

за умови, що $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau} Q_{t_0-\tau} = 1$.

Фільтр, імпульсна реакція $\varphi_{\tau}^*, \tau \in (-\infty, \infty)$ якого задовольняє умові (7.5) називається *оптимальним за критерієм максимального відношення сигнал/завада*.

Мінімум у (7.5) існує й однозначно визначається відомими методами пошуку умовних екстремумів функцій багатьох змінних. Ми наведемо лише результат. А саме, для того, щоб стаціонарний фільтр забезпечував на виході максимум відношення сигнал/завада в момент часу t_0 необхідно й достатньо, щоб його імпульсна реакція $\varphi_{\tau}^*, \tau \in (-\infty, \infty)$ задовольняла наступній системі рівнянь:

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau}^* R_{t_0-\tau, t_0-s} = c Q_{t_0-s}, \quad s = \overline{-\infty, \infty}, \quad (7.6)$$

де c – довільна дійсна константа.

Розглянемо тепер, яким же чином, здійснюючи оптимальну, за критерієм максимального відношення сигнал/завада, фільтрацію сигналу (7.1), можна встановити наявність чи відсутність у ньому складової Q_t . Найпростішим пристроєм, що здійснює таку фільтрацію є

Узгоджений фільтр, призначенням якого є виявлення детермінованих сигналів на фоні завад, при умові, що завада ξ_t являє собою стаціонарний “білий шум” у широкому розумінні, тобто

$$R_{t_1, t_2} = R_{t_2 - t_1} = R_{\tau} = \begin{cases} \sigma^2, & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0, \end{cases} \quad (7.7)$$

де $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_t$ – дисперсія “білого шуму”.

Підставивши (7.7) у (7.6) і, поклавши $c = 1$, отримаємо:

$$\varphi_{\tau}^* = \frac{1}{\sigma^2} Q_{t_0-\tau}. \quad (7.8)$$

В загальному випадку, імпульсна реакція узгодженого фільтра має вигляд:

$$\varphi_{\tau}^y = k Q_{t_0-\tau}, \quad (7.9)$$

де k – довільна дійсна константа (надалі покладемо $k = 1$).

Походження терміну “узгоджений” очевидно впливає з (7.9), тобто, маємо фільтр, імпульсна реакція якого повністю визначається тільки “корисним сигналом” Q_t , “узгоджена” з ним (див. рис. 7.1).

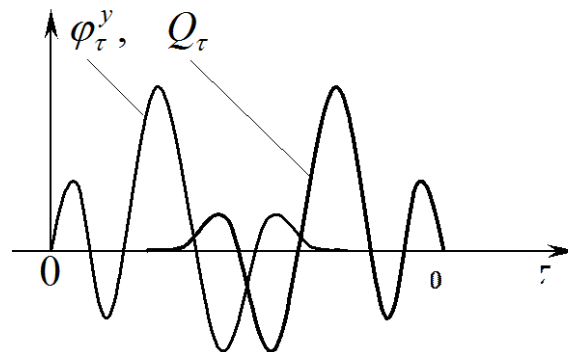


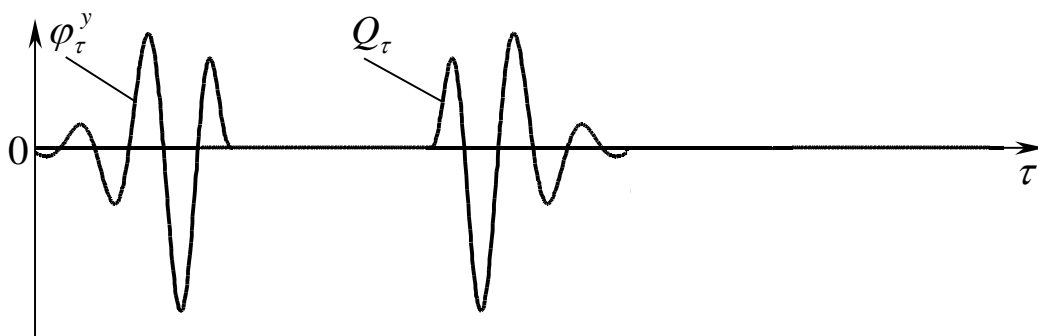
Рисунок 7.1

В момент часу t_0 узгоджений фільтр забезпечує на виході максимальне відношення сигнал/завада, яке в даному випадку дорівнює:

$$\gamma[\varphi_\tau^y] = \frac{E}{\sigma^2}, \quad (7.10)$$

де $E = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} Q_\tau^2$ – повна енергія “корисного сигналу”.

Серед усіх лінійних стаціонарних фільтрів, узгоджений фільтр дає на виході максимальне відношення значення “корисного сигналу” (воно завжди додатне!) в момент часу t_0 до середнього квадратичного відхилення завади. Це відношення дорівнює $\frac{\sqrt{E}}{\sigma}$. Цей факт і дає можливість, аналізуючи вихідний сигнал узгодженого фільтра, приймати рішення про наявність “корисного сигналу” на його вході (див. рис. 7.2).



a)

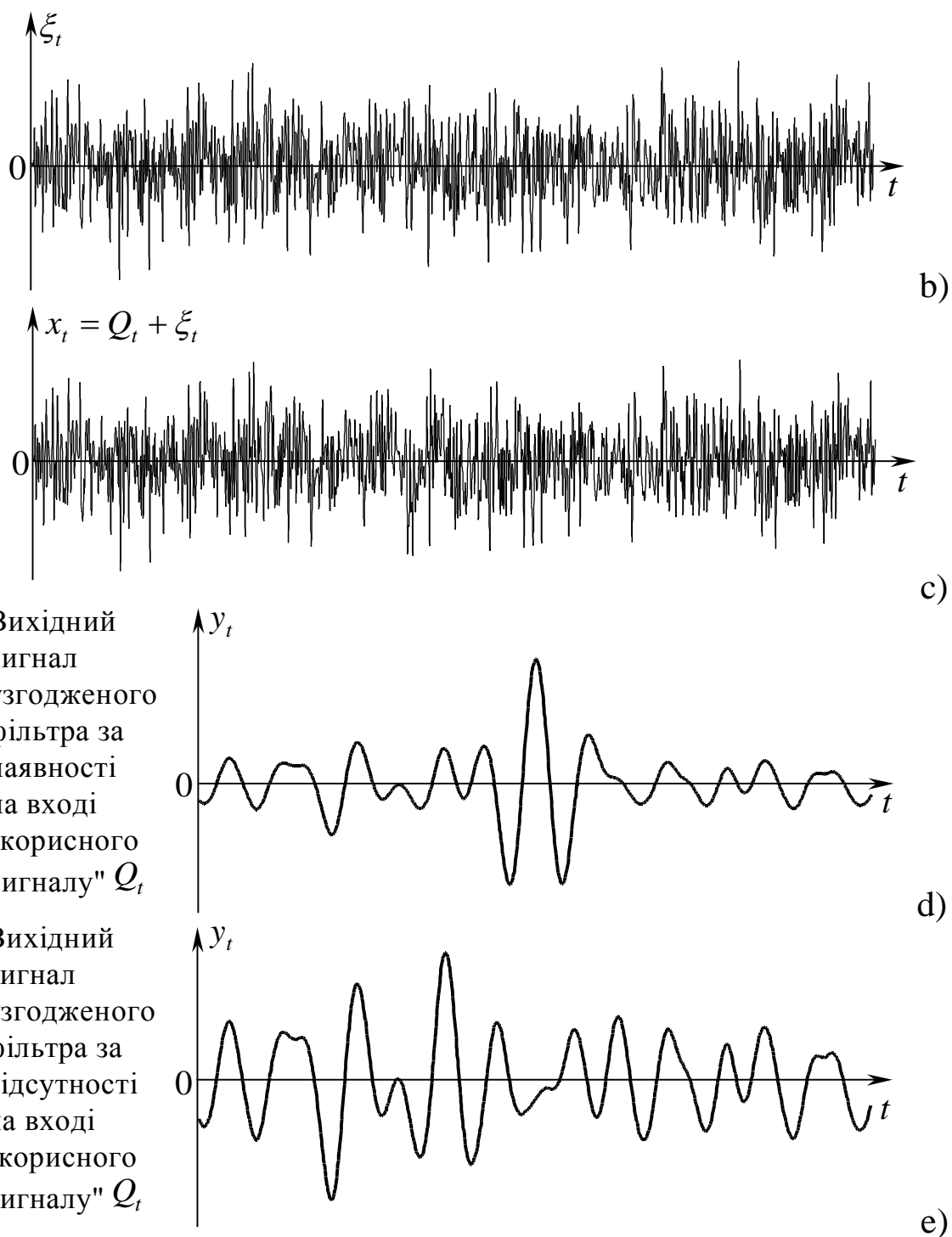


Рисунок 7.2

Таким чином, якщо максимальне значення реалізації вихідного сигналу y_t досягається в точці t_0 (або в деякій точці t' , близькій до t_0), то приймається рішення – “корисний сигнал” Q_t є на вході узгодженого фільтра, в іншому випадку приймається рішення – “корисного сигналу” Q_t немає на вході узгодженого фільтра.

Слід зауважити, що використання узгодженого фільтра є ефективним лише при достатньо великих значеннях відношення

сигнал/завада на виході (для прикладу, наведеного на рис. 7.2 $\frac{E}{\sigma^2} = 32.634$). Як правило, завжди вимагають, щоб було $\frac{E}{\sigma^2} \gg 1$ (принаймні, $\frac{E}{\sigma^2} > 10$). Чим більшим є відношення $\frac{E}{\sigma^2}$, тим більш “яскраво вираженим” є максимальне значення вихідного сигналу при наявності Q_t на вході. При недостатньо великому значенні відношення $\frac{E}{\sigma^2}$ “корисний сигнал” неможливо виявити методом узгодженої фільтрації. Тому на практиці, приймаючи рішення про застосування узгодженого фільтра, обов'язково слід враховувати співвідношення енергетичних характеристик “корисного сигналу” (E) і завади (σ^2).

Порядок виконання роботи

1. Вихідними даними для роботи є два файли, із записаними у них реалізаціями сигналу x_t , $t \in [0, n]$ (формат та обсяг даних слід уточнити у викладача).
2. $x_t = \xi_t + Q_t$, де ξ_t – центрований стаціонарний у широкому розумінні “білий шум” із дисперсією $\sigma^2 = 1$; Q_t – “корисний сигнал”, причому:
 - або $Q_t \equiv 0$, тобто “корисної складової” немає в сигналі x_t ;
 - або $Q_t = \begin{cases} a(t-m)^\beta e^{-\alpha(t-m)} \sin(\omega(t-m)), & t \in [m, m+L], \\ 0, & t \notin [m, m+L], \end{cases}$
(імпульс Бергале)
 де $a, \alpha, \beta, \omega, m, L$ – параметри “корисного сигналу”, значення яких вказано в таблиці 7.1 відповідно до варіанту.

Таблиця 7.1

Варіант	Параметри “корисного сигналу”					
	a	α	β	ω	m	L
1, 11, 21	0.003	0.04	2	0.09	250	200
2, 12, 22	0.002	0.04	2	0.05	300	
3, 13, 23	0.002	0.04	2.1	0.03	350	
4, 14, 24	0.003	0.02	1.5	0.03	400	
5, 15, 25	0.004	0.045	2	0.1	450	
6, 16, 26	0.003	0.04	2	0.15	500	
7, 17, 27	0.003	0.05	2.1	0.3	550	
8, 18, 28	0.003	0.04	2.1	0.4	600	
9, 19, 29	0.002	0.03	1.8	0.02	650	
10, 20, 30	0.009	0.04	1.7	0.04	700	

- Необхідно знайти імпульсну реакцію φ_τ^y узгодженого фільтра, призначеного для виявлення заданого “корисного сигналу” Q_t в момент часу $t_0 = m + L$. Знайти максимальне відношення сигнал/завада в момент часу t_0 на виході цього фільтра (див. (7.10)).
- Подати на вхід розрахованого фільтра задані реалізації сигналу x_t (з обох файлів), отримати відповідні реалізації вихідного сигналу $y_t = \sum_{\tau=0}^L \varphi_\tau^y x_{t-\tau}$, $t \in [\overline{L}, n]$, зробити висновки про наявність чи відсутність сигналу Q_t на вході фільтра.
- Оформити звіт по роботі.
Звіт повинен містити:
 - тему, мету роботи;
 - короткий виклад основних теоретичних положень;
 - графічне зображення “корисного сигналу” та імпульсної реакції узгодженого фільтра (в одній системі координат (див. рис. 7.2));
 - обчислене в п.3 значення максимального відношення сигнал/завада на виході узгодженого фільтра;
 - графіки реалізацій вхідного та вихідного сигналів (для обох файлів);
 - висновки;
 - додатки (тексти програм).

Контрольні запитання

1. У чому полягає задача виявлення детермінованих сигналів на фоні завад?
2. Що таке відношення сигнал/завада?
3. Моментні функції яких порядків використовуються для знаходження імпульсної реакції лінійного фільтра, оптимального за критерієм максимального відношення сигнал/завада?
4. Обґрунтуйте розв'язок задачі синтезу лінійного фільтра, оптимального за критерієм максимального відношення сигнал/завада.
5. Що таке “білий шум” у широкому розумінні? У вузькому розумінні?
6. Що таке узгоджений фільтр? Охарактеризуйте імпульсну реакцію узгодженого фільтра.
7. Чому рівне відношення сигнал/завада на виході узгодженого фільтра?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 8

ВИЯВЛЕННЯ ДЕТЕРМІНОВАНИХ СИГНАЛІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ КОВАРІАЦІЙНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Мета роботи: ознайомитись з теоретичними основами та набутти практичних навичок програмної реалізації систем виявлення детермінованих сигналів на фоні завад із використанням коваріаційного та взаємного коваріаційного перетворення.

Теоретичні відомості

У лабораторній роботі № 4 ми досліджували неінерційні нелінійні системи. Тепер ми розглянемо один клас інерційних нелінійних систем, однією з областей застосування яких є виявлення детермінованих сигналів на фоні завад.

Виявлення детермінованих сигналів із використанням коваріаційного (автоковаріаційного) перетворення.

Розглянемо простір випадкових функцій дискретного аргументу ξ_t , $t \in \mathbf{Z}$, які задовольняють умові:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2c} \mathbf{M} \sum_{t=-c}^c |\xi_t|^2 < \infty \quad (8.1)$$

(це умова скінченної середньої потужності, якій задовольняють, наприклад, стаціонарні випадкові процеси, періодичні, майже періодичні випадкові та детерміновані процеси та ін.).

Означення. Нелінійний оператор $\mathbf{A}[\cdot]$, заданий на введеному вище просторі випадкових функцій $\xi_t, t \in \mathbf{Z}$ у вигляді

$$\mathbf{A}[\xi_t] = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2c} \sum_{t=-c}^c \xi_t \xi_{t+\tau}, \tau \in \mathbf{Z} \quad (8.2)$$

називається коваріаційним (автоковаріаційним) оператором.

Нелінійна система, що описується оператором (8.2) називається *корелятором*. Якщо $x_t, t \in \mathbf{Z}$ – сигнал (із скінченною середньою потужністю) на вході корелятора, то на виході будемо мати сигнал

$$y_\tau = \mathbf{A}[x_t] = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2c} \sum_{t=-c}^c x_t x_{t+\tau}, \tau \in \mathbf{Z}. \quad (8.3)$$

Вихідний сигнал y_τ корелятора називається *коваріаційним (автоковаріаційним) перетворенням* вхідного сигналу x_t .

Зауваження.

1. Замість термінів коваріаційний оператор, коваріаційне перетворення вживаються також синоніми: кореляційний оператор, кореляційне перетворення.
2. Ми розглядаємо коваріаційне перетворення на просторі сигналів (з дискретним часом) із скінченною середньою потужністю, оскільки саме з такими сигналами ми будемо працювати в даній лабораторній роботі. Але слід мати на увазі, що в інших функціональних просторах коваріаційне перетворення теж може задаватися дещо по-іншому. Наприклад, у просторі детермінованих функцій дискретного аргументу $x_t, t \in \mathbf{Z}$, що задовольняють умові

$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |x_t|^2 < \infty$ (це умова скінченної енергії), коваріаційний оператор

задається як $\mathbf{A}[x_t] = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_t x_{t+\tau}, \tau \in \mathbf{Z}$. На просторах функцій

неперервного аргументу відповідні коваріаційні перетворення задаються у вигляді інтегральних операторів.

Використовуючи коваріаційне перетворення, можна виявляти *періодичні* детерміновані сигнали на фоні досить широкого класу завад. А саме.

Нехай на вході корелятора маємо випадкову послідовність виду:

$$x_t = Q_t + \xi_t, t \in \overline{(-\infty, \infty)}, \quad (8.4)$$

де Q_t – “корисний сигнал”, про який ми знаємо, що

- або $Q_t \equiv 0$ (тобто, “корисної складової” немає на вході корелятора),
- або Q_t – періодична детермінована послідовність (не обов'язково відома), для якої $\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2c} \sum_{t=-c}^c Q_t = 0$;

ξ_t – “завада” – центрована гільбертова стаціонарна в широкому розумінні випадкова послідовність.

На виході корелятора будемо мати випадкову послідовність:

$$y_\tau = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2c} \sum_{t=-c}^c (Q_t Q_{t+\tau} + Q_t \xi_{t+\tau} + \xi_t Q_{t+\tau} + \xi_t \xi_{t+\tau}).$$

Оскільки послідовність ξ_t – центрована, то математичне сподівання сигналу y_τ буде мати вигляд:

$$\mathbf{M}y_\tau = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2c} \sum_{t=-c}^c Q_t Q_{t+\tau} + \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2c} \mathbf{M} \sum_{t=-c}^c \xi_t \xi_{t+\tau} = \mathbf{A}[Q_t] + R_\tau,$$

де $\mathbf{A}[Q_t]$ – коваріаційне перетворення “корисного сигналу”;

$R_\tau = \mathbf{M}(\xi_t \xi_{t+\tau})$ – кореляційна функція “завади”.

Оскільки Q_t – періодична функція, то її можна зобразити у вигляді ряду Фур'є:

$$Q_t = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k), \quad (8.5)$$

де $a_k, \varphi_k, k = \overline{1, \infty}, \omega_0$ – параметри зображення (8.5).

Неважко переконатися, що в даному випадку

$$\mathbf{A}[Q_t] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \cos(k\omega_0 \tau) \quad (8.6)$$

(зокрема, якщо $Q_t = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$ – косинусоїда з параметрами a, ω_0, φ , то $A[Q_t] = \frac{1}{2} a^2 \cos(\omega_0 \tau)$).

Дуже часто на практиці зустрічаються завади, кореляційна функція R_τ , яких досить швидко “згасає” при зростанні τ від 0 до ∞ (тобто $R_\tau \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, див., наприклад, рис. 8.1, а). В той же час функція (8.6) є *періодичною* (не “згасає” при зростанні τ). Оскільки $M y_\tau = A[Q_t] + R_\tau$, то, аналізуючи в таких умовах поведінку функції $M y_\tau$ при зростанні τ , можна робити висновки про наявність “корисного сигналу” на вході корелятора. А саме, якщо $M y_\tau \rightarrow A[Q_t]$ при зростанні τ від 0 до ∞ , то “корисний сигнал” є на вході корелятора, якщо ж $M y_\tau \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, то “корисний сигнал” відсутній. Зрозуміло, що в даному випадку зовсім не обов'язково, щоб сигнал Q_t був відомим (досить знати, що він періодичний), оскільки висновок про його наявність на вході корелятора впливає вже з того, що при зростанні τ $M y_\tau$ наближається до деякої періодичної функції. Наведені вище міркування ілюструються на рисунку 8.1.

При практичному застосуванні описаного вище підходу з'являється ряд особливостей. Перш за все, на практиці, як правило, мають справу з скінченною вибіркою вхідного сигналу $x_t, t \in [1, n]$. Тому, замість (8.3) використовують співвідношення

$$y_\tau = \frac{1}{n - \tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} x_t x_{t+\tau}, \quad \tau = 0, 1, 2, \dots, n_1 \ll n. \quad (8.7)$$

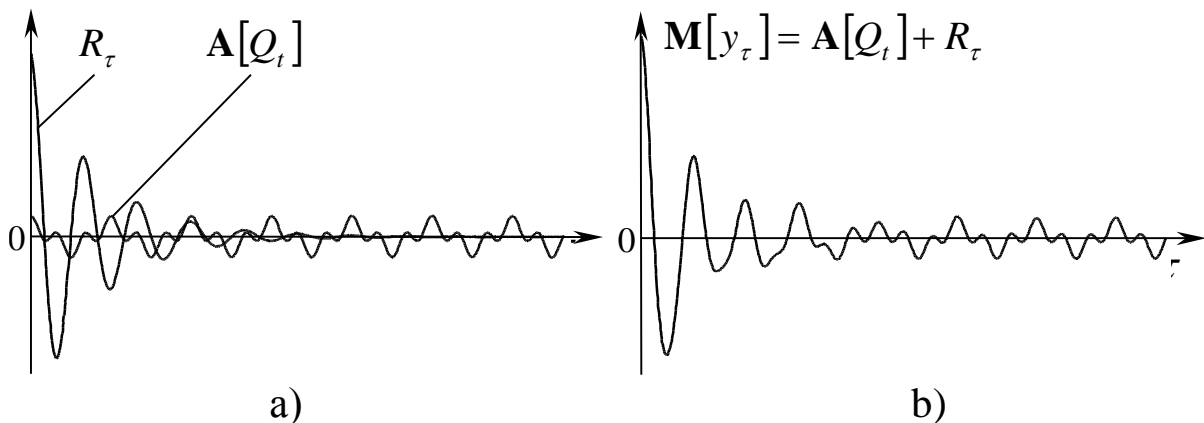
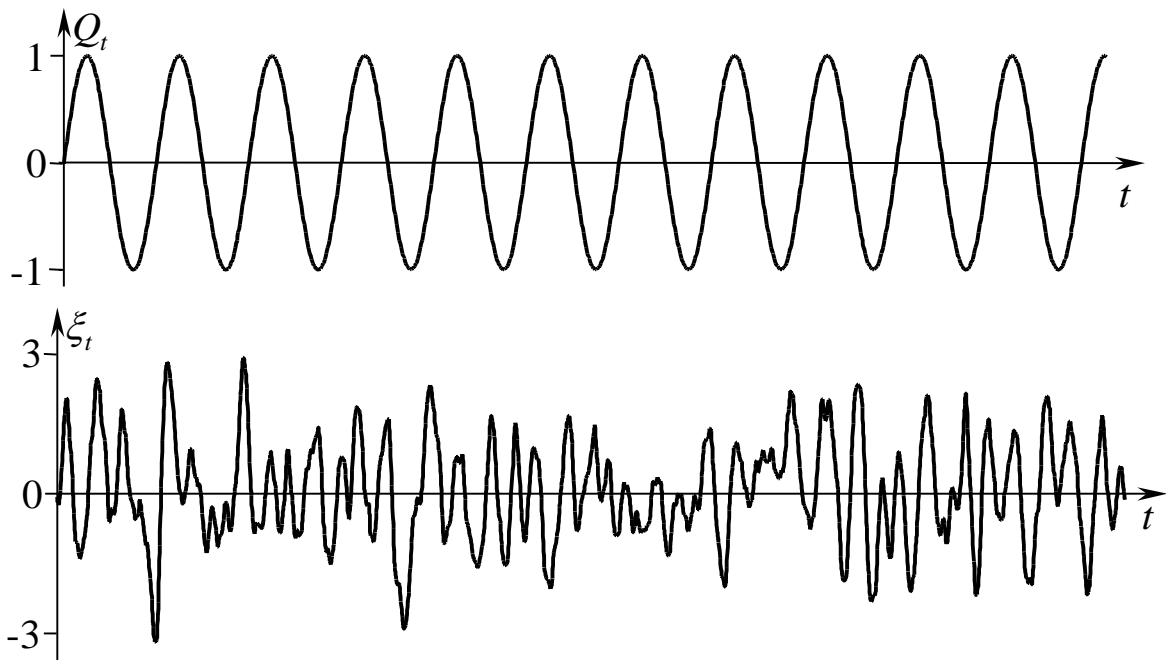


Рисунок 8.1

Крім того, доступним для спостереження є вихідний сигнал корелятора y_τ (нестационарний випадковий процес), а не його

математичне сподівання Mu_τ , тому для ефективного виявлення необхідно мати якомога більший обсяг вибірки n , принаймні, у кілька разів більший за період “корисного сигналу” та час τ_z “згасання” кореляційної функції R_τ “завади” ($R_\tau \approx 0 \quad \forall |\tau| > \tau_z$). На рисунку 8.2 наведено приклад практичного виявлення періодичного детермінованого сигналу з використанням кореляційного перетворення ($n=10000$).

Зауваження. Якщо в (8.7) x_t – центрований стаціонарний у широкому розумінні випадковий процес (ЦСВП), то, очевидно, y_τ буде статистичною оцінкою його кореляційної функції (див. (2.12)). У зв'язку з цим інколи плутають поняття: кореляційна функція, оцінка кореляційної функції, коваріаційне (кореляційне) перетворення. Тому слід мати на увазі, що результатом коваріаційного перетворення є статистична оцінка кореляційної функції тільки тоді, коли перетворюваний процес – ЦСВП (у цьому випадку корелятор ще називають *корелометром*, тобто пристроєм, призначеним для вимірювання кореляційної функції). У всіх інших випадках (коли x_t – детермінований чи нестационарний випадковий процес, чи процес, що не є ергодичним відносно своєї кореляційної функції та ін.) (8.3) чи (8.7) слід називати і трактувати тільки як коваріаційне перетворення.



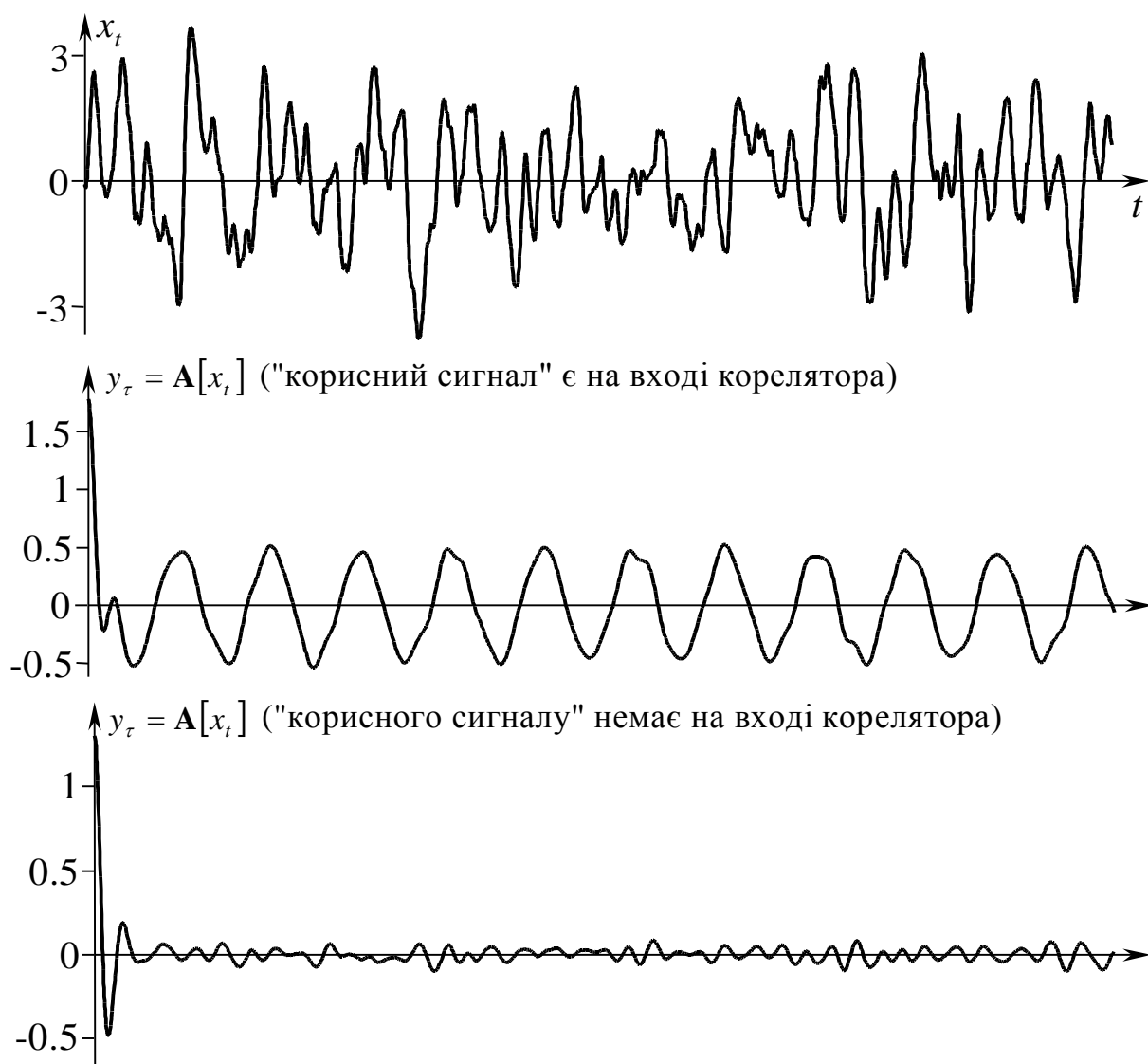


Рисунок 8.2

Виявлення детермінованих сигналів із використанням взаємного коваріаційного перетворення.

Нехай $\xi_t, \eta_t, t \in \mathbf{Z}$ – випадкові послідовності, що задовольняють умові (8.1).

Означення. Нелінійний оператор $\mathbf{B}[\cdot]$, заданий як

$$\mathbf{B}[\xi_t, \eta_t] = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2c} \sum_{t=-c}^c \xi_t \eta_{t+\tau}, \tau \in \mathbf{Z} \quad (8.8)$$

називається взаємним коваріаційним оператором.

Функція $y_\tau = \mathbf{B}[\xi_t, \eta_t]$, яка є результатом дії оператора (8.8) називається взаємним коваріаційним перетворенням послідовностей ξ_t і η_t .

Розглянемо тепер знову сигнал x_t (8.4), але нехай тепер “корисний сигнал” Q_t (при його наявності) – відома детермінована (не обов'язково періодична) послідовність із скінченною середньою потужністю.

Розглянемо взаємне коваріаційне перетворення сигналів x_t та Q_t :

$$y_\tau = \mathbf{B}[x_t, Q_t] = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2c} \sum_{t=-c}^c x_t Q_{t+\tau} = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2c} \sum_{t=-c}^c (Q_t Q_{t+\tau} + \xi_t Q_{t+\tau}). \quad (8.9)$$

Оскільки $\mathbf{M}\xi_t = 0$, то

$$\mathbf{M}y_\tau = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2c} \sum_{t=-c}^c Q_t Q_{t+\tau} = \mathbf{A}[Q_t].$$

Таким чином, задача виявлення “корисного сигналу” на основі аналізу функції $\mathbf{M}y_\tau$ в даному випадку вирішується так: якщо $\mathbf{M}y_\tau = \mathbf{A}[Q_t]$, то сигнал x_t містить “корисну складову”, а якщо $\mathbf{M}y_\tau = 0$, то $Q_t = 0$.

Пристрій, призначений для виявлення детермінованого сигналу з використанням взаємного коваріаційного перетворення (8.9) називається *когерентним приймачем*. Когерентний приймач є нелінійною системою, що описується взаємним коваріаційним оператором (8.8). На відміну від корелятора, який є системою з одним входом і одним виходом, когерентний приймач є системою з двома входами та одним виходом (рис. 8.3).

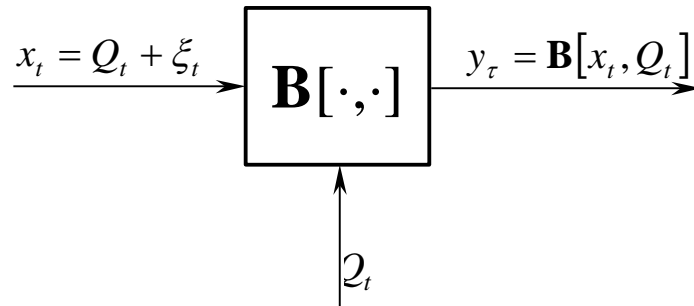


Рисунок 8.3

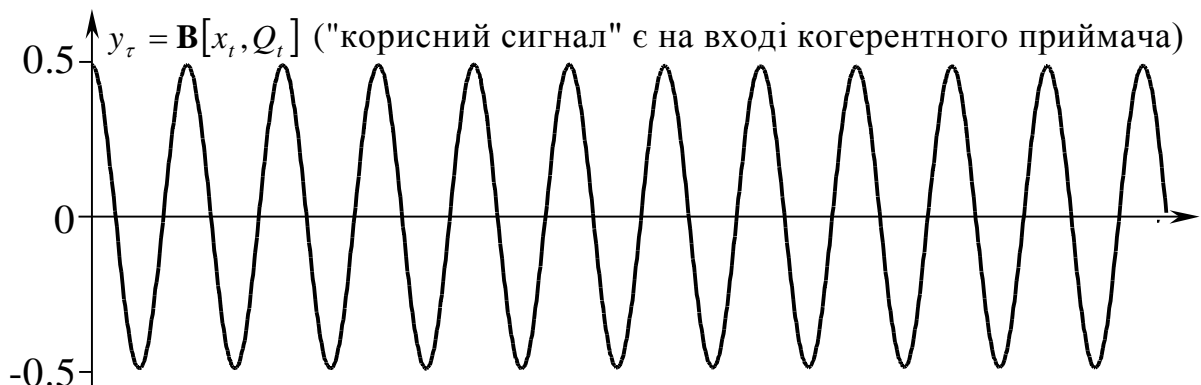
За наявності скінченної вибірки вхідного сигналу $x_t, t \in \overline{1, n}$ замість (8.9) слід використовувати співвідношення:

$$y_\tau = \frac{1}{n - \tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} x_t Q_{t+\tau}, \quad \tau = 0, 1, 2, \dots, n_1 \ll n. \quad (8.10)$$

Доступним для спостереження є, знову ж таки, не $\mathbf{M}y_\tau$, а вихідний сигнал когерентного приймача (8.10), який із зростанням n наближається до $\mathbf{M}y_\tau$, тому для ефективного виявлення слід вибирати обсяг вибірки n якомога більшим. Приклад виявлення детермінованого сигналу з використанням взаємного коваріаційного перетворення наведено на рис. 8.4 (сигнали Q_t, ξ_t, x_t ті ж, що і на рис. 8.2, $n = 10000$).

Порядок виконання роботи

1. Вихідними даними для роботи є два файли, із записаними у них реалізаціями сигналу $x_t, t \in [1, n]$ (формат та обсяг даних слід уточнити у викладача).
2. $x_t = \xi_t + Q_t$, де ξ_t – центрована стаціонарна в широкому розумінні випадкова послідовність із “згасаючою” кореляційною функцією; Q_t – “корисний сигнал”, причому:
 - або $Q_t \equiv 0$, тобто “корисної складової” немає в сигналі x_t ;
 - або $Q_t = \sin\left(\frac{\pi}{30 + 2k}t\right)$, де k – номер варіанту.



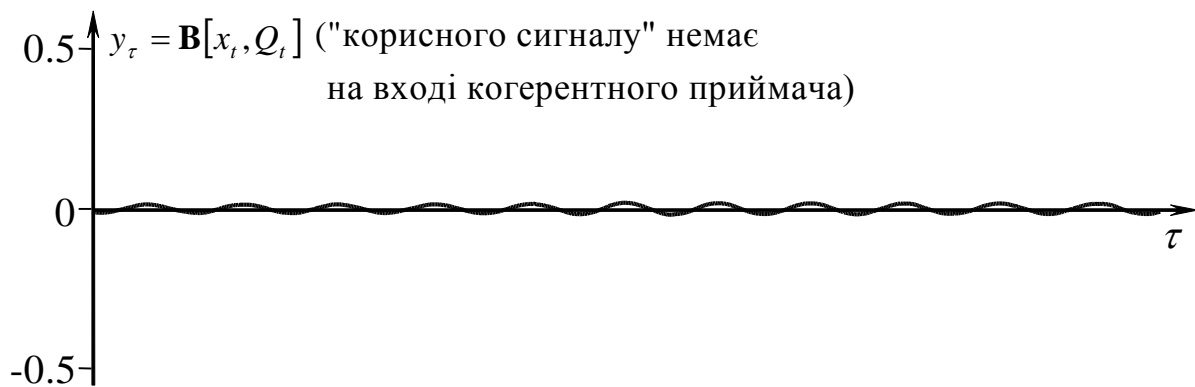


Рисунок 8.4

3. Необхідно зробити висновок про наявність чи відсутність складової Q_t в сигналі x_t (для даних з кожного файлу), використовуючи для цього коваріаційне перетворення (для непарних номерів варіантів) або взаємне коваріаційне перетворення (для парних номерів варіантів).
4. Оформити звіт по роботі.
Звіт повинен містити:
 - тему, мету роботи;
 - короткий виклад основних теоретичних положень;
 - графічне зображення реалізацій заданих сигналів x_t та реалізацій сигналів y_t на виході корелятора чи когерентного приймача (відповідно до варіанту);
 - висновки;
 - додатки (тексти програм).

Контрольні запитання

1. Що таке коваріаційне перетворення? За яких умов коваріаційне перетворення буде статистичною оцінкою кореляційної функції випадкового процесу?
2. Чому дорівнює кореляційна функція детермінованого сигналу?
3. Що таке корелятор, корелометр?
4. Яким чином можна виявити детермінований періодичний сигнал на фоні завади, використовуючи корелятор?
5. Що таке взаємне коваріаційне перетворення?
6. Що таке когерентний приймач?
7. На чому базується принцип виявлення детермінованого сигналу з використанням когерентного приймача?

8. Корелятор (або когерентний приймач) є лінійною системою чи нелінійною, інерційною чи неінерційною?

ЛІТЕРАТУРА

1. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с.
2. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 755 с.
3. Бабак В.П., Марченко Б.Г., Фриз М.Є. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика. – К.: Техніка, 2004. – 288 с.
4. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник. – М.: Высш. школа, 1983. – 536 с.
5. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
6. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Прогноз и управление: Пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – Вып. 1. – 406 с.
7. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища шк., 1979. – 408 с.
8. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 448 с.
9. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1971. – Вып. 1. – 317 с.
10. Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды: Пер. с англ. – М.: Наука, 1976. – 736 с.
11. Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи: Пер. с англ. – М.: Наука, 1973. – 900 с.
12. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.
13. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. – М.: Физматгиз, 1962. – 352 с.
14. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: В 2-х томах. Пер. с франц. – М.: Мир, 1983. – 568 с.
15. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 584 с.

- 16.Марченко Б.Г., Приймак М.В., Щербак Л.М. Теоретичні основи аналізу стохастичних сигналів і шумів. – Тернопіль: ТДТУ імені І. Пулюя, 2001. – 179 с.
- 17.Марченко В.Б. Ортогональные функции дискретного аргумента и их приложение в геофизике. – К.: Наукова думка, 1992. – 211 с.
- 18.Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу “Обробка сигналів та зображень” / Б.Г. Марченко, М.Є. Фриз. – Тернопіль: ТДТУ імені І. Пулюя, 2002. – 80 с.
- 19.Мюллер П., Нойман П., Шторм Р. Таблицы по математической статистике: Пер. с нем. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 278 с.
- 20.Тихонов В.И. Нелинейные преобразования случайных процессов.– М.: Радио и связь, 1986. – 296 с.
- 21.Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
- 22.Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1989. – 634 с.
- 23.Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 576 с.

ДОДАТОК А

Вимоги до оформлення та захисту звітів

Звіт до лабораторної роботи рекомендовано готувати у текстовому редакторі MS Word, використовуючи:

- формат сторінки – А4;
- розмір шрифту – 14 – 16 пт.

Побудову графіків можна здійснювати у будь-якому графічному середовищі, яким володіє студент.

Перша сторінка звіту – титульна, зразок її оформлення наведено нижче.

При захисті звіту необхідно назвати тему, мету роботи, викласти:

- постановку задачі;
- методику розв’язку задачі;
- результати розв’язку задачі;
- аналіз отриманих результатів;
- висновки;

відповісти на запитання викладача.

Форма титульної сторінки звіту

Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра комп'ютерних наук

ЗВІТ

до лабораторної роботи № 5
з курсу *“Обробка сигналів та зображень”*

Цифрові фільтри

Виконав:
студент групи СНс-31
Сигналенко О.Ф.

Перевірів:
доц. кафедри КН
к.т.н. Млинко Б.Б.

Тернопіль 2015

Для нотаток

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.



Видавництво Тернопільського національного технічного університету ім. І. Пулюя

виготовляє підручники для вузів, методичну літературу, художні видання, надає редакційно-видавничі та поліграфічні послуги з набору тексту, розробки макетів і друку книги чи будь-якої іншої поліграфічної продукції (брошури, плакати, афіші, календарі).

КРІМ ТОГО, ВИДАВНИЦТВО ПРОПОНУЄ ТАКІ ПОСЛУГИ:

- дизайн візитівок, буклетів, вітальних листів;
- професійне вичитування і верстку;
- сканування та копіювання;
- чорно-білий і повноколірний друк.



м. Тернопіль,
вул. Гоголя, 8.
Тел.: 43-02-09.

e-mail: vydavnytstvo@tu.edu.te.ua

Навчально-методична література

Млинко Б.Б., Фриз М.Є.

**Методичні вказівки
до лабораторних робіт №5 – №8 з курсу**

ОБРОБКА СИГНАЛІВ ТА ЗОБРАЖЕНЬ

Для студентів напряму підготовки
6.050101 “Комп’ютерні науки”

Комп’ютерне верстання *О.А. Дзядик*

Формат 60x90/16. Обл. вид. арк. 1,03 Тираж 20 прим. Зам. № 2632.

Видавництво Тернопільського національного
технічного університету імені Івана Пулюя.
46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4226 від 08.12.11.